LIBORIUS-GYMNASIUM DESSAU

Staatlich anerkannte Ersatzschule in Trägerschaft der Edith-Stein-Schulstiftung des Bistums Magdeburg

Nicht einfach nur Schule

Aufgabenblatt

Name der Lehrkraft:	Frau Groneberg	dienstl. E-Mail:	sgroneberg@libo.info
Klasse/Kurs:	12d		Fach: MATHEMATIK
Aufgaben für den:	20.04. bis	27.04.2020	Umfang:

Wichtiger Hinweis:
Soweit in der Aufgabenstellung erwartet, erfolgt die Abgabe an die Lehrkraft per Mail. Dokumente können im Format *pdf, jpeg, jpg, txt* oder *mp3* (Hördateien) über einen Anhang an eine Mail eingereicht werden. Bitte nicht direkt in den Email-Editor schreiben und keine odt- oder doc/docx – Dokumente einreichen. Bei jedem eingereichten Dokument sollte möglichst sowohl über den Dokumentnamen als ggf. auch über die Kopfzeile des Textes der Name des Verfassers/der Verfasserin zu ersehen sein.

Aufgaben und Erläuterungen:

Liebe Abiturienten,
wie ihr bereits festgestellt habt, treten im Thema "Stochastik/Beurteilende Stochastik" Diagramme auf, die ihr im Lehrbuch auch nicht findet (Abitur 2018/2019). Im Anhang findet ihr eine Übersicht zum Umgang mit diesen Diagrammen und eine Aufgabe dazu.

In dieser Aufgabe geht es u.a. auch um die Interpretation von Termen und Gleichungen, darauf möchte ich in der Konsultation eingehen.

Bis zum Freitag!
Viele Grüße
Susanne Groneberg

Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)

μ = $n \cdot p$ σ = $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Vertrauenswahrscheinlichkeit: (c Faktor vor dem σ)

68%	c=1	→	σ
95%	c=1,96	→	1,96σ
95,5%	c=2	→	2σ
99,7%	c=3	→	3σ

Vertrauensintervall für X: $\mu - c \cdot \sigma \leqslant X \leqslant \mu + c \cdot \sigma$

bzw. $n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

X: absoluter Wert der Zufallsgröße

Vertrauensintervall für h_n = $\frac{X}{n}$ (relativer Wert der Zufallsgröße):

$$\frac{n\cdot p}{n}-\frac{c\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} \leq \frac{X}{n} \leq \frac{n\cdot p}{n}+\frac{c\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n}$$

$$p-\frac{c\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n^2}} \leq h_n \leq p+\frac{c\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n^2}}$$

$$p-c\cdot\sqrt{\frac{n\cdot p\cdot(1-p)}{n^2}} \leq h_n \leq p+c\cdot\sqrt{\frac{n\cdot p\cdot(1-p)}{n^2}}$$

$$p-c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \leq h_n \leq p+c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Bei der Berechnung der Intervallgrenzen muss eine quadratische Gleichung gelöst werden, was aufwendig ist. Daher ist für ***0,3 ≤ p ≤ 0,7*** eine ***Näherungslösung*** möglich:

$$p-c\cdot\sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}} \leq h_n \leq p+c\cdot\sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}}$$

Es ergeben sich folgende Vertrauensintervalle für p und h_n:

p bekannt: $h_n\in[\,p-c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\,;p+c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\,]$

h_n bekannt : $p\in[\,h_n-c\cdot\sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}}\,;h_n+c\cdot\sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}}\,]$

Will man die Intervallgrenzen nicht berechnen, so ist auch auch eine graphische Lösung möglich, wenn man ein entsprechendes DMW benutzt.
Dabei werden die Intervallgrenzen als Funktion von p dargestellt:

rechte bzw. linke Intervallgrenze : $f_c(p)$ = $p-c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ für p bzw. h_n

linke bzw. rechte Intervallgrenze: $g_c(p)$ = $p+c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ für p bzw. h_n

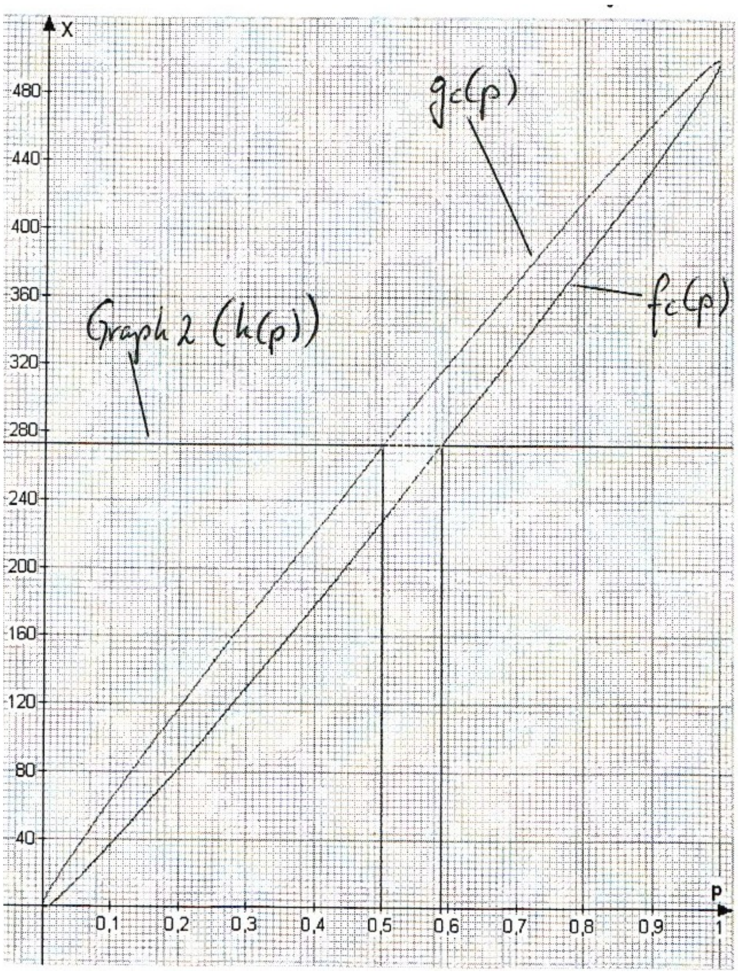
Auf der x-Achse erscheint die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die y-Achse stellt die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten der Zufallsgrößenwerte dar (aus der Stichprobe).

Beispiel:
Man fragt bei einer Wahlprognose 500 Personen, ob sie Kandidat A wählen werden. Dabei ergibt sich, dass 273 Personen voraussichtlich Kandidat A wählen.
Es soll nun ein Vertrauensintervall für die unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit p der Wahl von Kandidat A auf dem Vertrauensintervall 95% erstellt werden.

Es gilt: $n \cdot p - 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq 273 \leq n \cdot p + 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

bzw. $500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)} \leq 273 \leq 500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)}$

Graph 1	Graph 2	Graph 3
$f_c(p)$	**h(p)=273**	**$g_c(p)$**



Wir suchen das Intervall auf der p-Achse, für das gleichzeitig $f_c(p) \leq h(p)$ und $g_c(p) \leq h(p)$ gilt. Die Intervallgrenzen bilden offenbar die Schnittstellen von $f_c(p)$ bzw. $g_c(p)$ mit h(p):

→ Vertrauensintervalle für p : $p \in [0{,}50 ; 0{,}59]$

A) Gestufte Aufgabe

A1. Stochastik (Kompetenzschwerpunkt "Beurteilende Statistik")

Ein Medikament wirkt mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Zur Ermittlung eines Schätzwertes dieser Wahrscheinlichkeit wird eine Stichprobe erhoben und das Medikament an n Probanden getestet. Die "Trefferzahl" X gibt an, bei wie vielen Probanden das Medikament gewirkt hat.

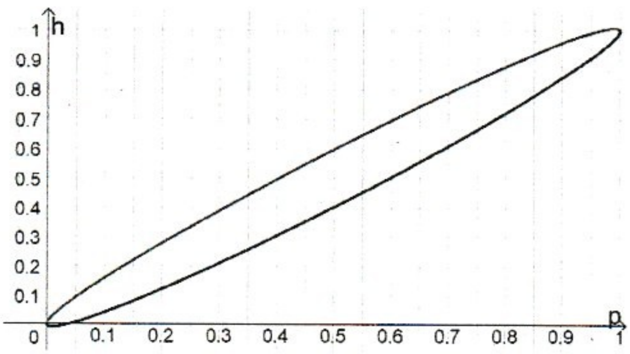
a) Geben Sie eine Punktschätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p an und beurteilen Sie deren Verlässlichkeit.

b) An 100 Probanden wurde das Medikament getestet und bei 91 erwies sich das Medikament als wirksam. Bestimmen Sie zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $\gamma = 95\%$ das Vertrauensintervall und interpretieren Sie dieses.

c) Formulieren Sie die Ungleichung $|h-p| \le 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$ in Worten und bestimmen Sie mithilfe dieser das Vertrauensintervall für p.

d) In der nebenstehenden Abbildung sind für $p \in [0;\, 1]$ die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 dargestellt mit

$$f_{1,2}(p) = p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$



Ermitteln Sie anhand dieser Abbildung das 95%-Vertrauensintervall der unbekannten Wahrscheinlichkeit p.

e) Ermitteln Sie den Mindestumfang n der Stichprobe, sodass das 95%-Vertrauensintervall eine maximale Länge von d = 0,1 hätte.

f) Angenommen, die tatsächliche Wahrscheinlichkeit der Wirksamkeit des Medikaments in der Grundgesamtheit sei p = 0,83.

Ermitteln Sie zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten $\gamma = 95\%$ und $\gamma = 99\%$ jeweils die Stichprobenergebnisse, die mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p verträglich wären.

Begründen Sie, dass das in Aufgabe b verwendete Stichprobenergebnis signifikant, aber nicht hochsignifikant, von der Wahrscheinlichkeit p abweicht.

g) Erörtern Sie mögliche Konsequenzen von Fehlentscheidungen bei der Beurteilung der Wirksamkeit des Medikaments und erläutern Sie anhand dieser Problemstellung den Gegenstand der Beurteilenden Statistik.